N° 0543

ÉCOLE NAVALE

Concours 1981

Deuxième composition de mathématiques

(Les trois exercices sont indépendants).

Exercice n° 1.

On envisage la courbe (C) définie paramétriquement par :

$$x = t^3 - 3t + 3 \quad , y = 3t + \frac{1}{t^3} + 2 \quad , t \neq 0;$$

préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente, au voisinage des points stationnaires (on pourra écrire, au voisinage du point stationnaire Mo, obtenu pour $t = t_0$:

$$M = M(t_0 + h), \quad \overrightarrow{MoM} = h\overrightarrow{OM'}(t_0) + \frac{h^2}{2!}\overrightarrow{OM''}(t_0) + \ldots)$$

– Établir que (C) admet une courbe asymptote (Γ) d'équation

$$x = ay^3 + by^2 + cy + h,$$

donner les valeurs des réels a, b, c et h, et préciser la position de (C) par rapport à (Γ) lorsque $|t| \to +\infty$.

On ne demande pas de tracer le graphe de (C).

Exercice n° 2.

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à éléments réels ; E muni de l'addition habituelle des matrices, et de la multiplication habituelle d'une matrice par un réel, possède une structure d'espace vectoriel sur **R** (corps des réels).

Soit M un élément de E, posons :

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

a, b, c et d étant des réels ; désignons par A le sous-ensemble de E formé des matrices M telles que :

$$a + d = 0,$$

et par B le sous-ensemble de E formé des matrices M telles que :

$$a = 0 \text{ et } d = 0$$

1°. Montrer que A et B sont deux sous-espaces vectoriels de E, et donner une base de chacun de ces sous-espaces.

.../...

2°. Soit N un élément fixé de A, tel que $a \neq O$.

Déterminer toutes les matrices colonnes

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \quad , x \in \mathbb{R},$$

satisfaisant l'équation matricielle

$$(1 \quad x) N \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = O.$$

Montrer que l'on peut déterminer des matrices colonnes

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} , x \text{ et } y \in \mathbb{R},$$

vérifiant les conditions :

$$(1 \quad x) \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = O \quad , (1 \quad x) N \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = O \text{ et } (1 \quad y) N \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = O.$$

En déduire qu'il existe au moins une matrice carrée K d'ordre 2 à éléments réels, vérifiant les relations, en posant :

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \quad , a \neq O,$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = W,$$

où $W \in B$; expliciter K.

Exercice n° 3.

Soit (ξ) un espace affine euclidien rapporté au repère cartésien orthonormé orienté $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et un torseur (T) dont les éléments de réduction au point O sont :

$\vec{R}(T) = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ et $\vec{M}_o(T) = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k}$,

($\vec{R}(T)$ est la résultante générale de (T) et $\vec{M}_O(T)$ le moment résultant en O de (T)), les cinq réels X, Y, L, M et N étant des réels tous non nuls ; et on donne le cercle (C) d'équations :

$$(C) : \left\{ x = O, y^2 + z^2 = r^2 \right\} , r \text{ étant un réel strictement positif.}$$

1° On cherche s'il est possible de déterminer deux glisseurs (G_1) et (G_2) satisfaisant les conditions :

$(T) = (G_1) + (G_2)$, l'axe (D_1) de (G_1) rencontre l'axe Ox en un point A d'abscisse x non nulle, et l'axe (D_2) de (G_2) est tangent au cercle (C).

Donner les conditions que doivent vérifier les scalaires X, Y, Z, L, M, N et r afin que le problème admette au moins une solution.

Préciser l'équation permettant de déterminer l'inconnue x.

2° Applications numériques, étudier les cas particuliers :

$\alpha)$ $\vec{R}(T) = (1, 1, 0)$, $\vec{M}_o(T) = (1, -1, 1)$ et $r = 1$;

$\beta)$ $\vec{R}(T) = (1, 1, 0)$, $\vec{M}_o(T) = (1, -1, 1)$ et $r = \sqrt{2}$;

$\gamma)$ $\vec{R}(T) = (1, 1, 0)$, $\vec{M}_o(T) = (1, -1, 1)$ et $r = 2$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail